

Сучасна логіка (класична та некласична). Видання третє

Пропонований читачеві підручник написано на основі досвіду читання курсу «Сучасної логіки» в Київському національному університеті імені Тараса Шевченка, у Національному університеті "Києво-Могилянська академія".

В підручнику розкриті історичні та теоретичні передумови виникнення сучасної логіки. В частині «Класична логіка» проаналізовано специфіку та особливості алгебраїчної системи і числень.

На конкретному матеріалі показано єдність логіки висловлювань та логіки предикатів. Особлива увага приділяється природі неklasичної логіки й шляхам застосування її засобів для потреб пізнавального процесу.

Розраховано на студентів вищих навчальних закладів, аспірантів, а також на усіх, хто цікавиться проблемами сучасної логіки та бажає долучитися до скарбниці логічної науки.

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

А. Є. Конверський

СУЧАСНА ЛОГІКА

(КЛАСИЧНА ТА НЕКЛАСИЧНА)

*3-тє видання,
перероблене та доповнене*

ПІДРУЧНИК

Київ
«Центр учбової літератури»
2024

УДК 16(075.8)
ББК 87.4я73
К 64

*Рекомендовано до друку
Вченою радою філософського факультету
Київського національного університету імені Тараса Шевченка
(Протокол № 11 від 27.04.2022 р.)*

*Ухвалено методичною радою
Київського національного університету імені Тараса Шевченка
(Протокол № 7-77 від 29.09.2022 р.)*

Рецензенти:

Дуцяк І. З. – доктор філософських наук, професор;
Шенгерій Л. М. – доктор філософських наук, професор.

Конверський А. Є.

К 64 Сучасна логіка (класична та некласична). 3-тє вид. перероб. та доп. –
К.: Центр учбової літератури, 2024. – 292 с.

ISBN 978-966-370-187-5

*На першій сторінці обкладинки підручника картина Мікеланджело
Буонаротті «Творення Адама».*

*Ця картина символізує, що так само як Бог вселяє в Адама душу і
передає йому саму важливу цінність – здатність творити, так логіка
втілюючись в мові, як системі знаків, перетворює її в силу, з допомогою
якої вдається впливати на світ, змінювати його.*

Пропонований читачеві підручник написано на основі досвіду читання курсу «Сучасної логіки» в Київському національному університеті імені Тараса Шевченка, у Національному університеті "Києво-Могилянська академія".

В підручнику розкриті історичні та теоретичні передумови виникнення сучасної логіки. В частині «Класична логіка» проаналізовано специфіку та особливості алгебраїчної системи і числень.

На конкретному матеріалі показано єдність логіки висловлювань та логіки предикатів. Особлива увага приділяється природі некласичної логіки й шляхам застосування її засобів для потреб пізнавального процесу.

Розраховано на студентів вищих навчальних закладів, аспірантів, а також на усіх, хто цікавиться проблемами сучасної логіки та бажає долучитися до скарбниці логічної науки.

УДК 16(075.8)
ББК 87.4я73

ISBN 978-966-370-187-5

© Конверський А. Є., 2024.
© Центр учбової літератури, 2024.

ЗМІСТ

ЧАСТИНА ПЕРША

Класична логіка

Вступ.....	5
------------	---

Розділ I

ПЕРЕДУМОВИ СУЧАСНОЇ ЛОГІКИ.....	11
---------------------------------	----

1.1. Теорія множин і логіка	11
1.1.1. Визначення множини	11
1.1.2. Побудова множини та її фундаментальні ознаки	11
1.1.3. Операції над множинами	22
1.2. Семантичний аналіз виразів природної мови	28
1.2.1. Поняття семантичної категорії	28
1.2.2. Характеристика дескриптивних термінів.....	30
1.2.3. Визначення логічних термінів	41
1.3. Функціональний аналіз у логіці.....	57
1.3.1. Мотивація функціонального аналізу в логіці	57
1.3.2. Види функцій	60

Розділ II

ЛОГІКА ВИСЛОВЛЮВАНЬ	65
---------------------------	----

2.1. Алгебра логіки висловлювань	65
2.1.1. Мова алгебраїчної системи логіки висловлювань	66
2.1.2. Типологія формул за синтаксичними ознаками	70
2.1.3. Види формул за семантичними ознаками	73
2.1.4. Типологія формул за семантичними ознаками	76
2.1.5. Рівносильні формули.....	80
2.1.6. Логічні відношення між формулами	86
2.1.7. Нормальні форми логіки висловлювань.....	87
2.2. Числення логіки висловлювань.....	106
2.2.1. Аксиоматичне числення логіки висловлювань.....	107
2.2.2. Метатеорема про дедукцію.....	113
2.2.3. Металогічні принципи в S^2	116

2.2.4. Натуральне числення логіки висловлювань.....	122
Розділ III	
ЛОГІКА ПРЕДИКАТІВ	130
3.1. Алгебраїчна система логіки предикатів.....	130
3.1.1. Мова алгебраїчної системи логіки предикатів.....	131
3.1.2. Семантика алгебраїчної системи логіки предикатів	134
3.1.3. Процедури встановлення значень формулам S^4	140
3.1.4. Типологія формул S^4 за семантичними ознаками	143
3.1.5. Логічні відношення між формулами в S^4	146
3.1.6. Проблема розв'язання	148
3.1.7. Закони логіки предикатів	154
3.1.8. Процедури для розв'язання виразів логіки предикатів ...	161
3.2. Числення логіки предикатів	166
3.2.1. Аксиоматичне числення предикатів	167
3.2.2. Теорема про дедукцію в S^5	174
3.2.3. Металогічні принципи аксиоматичного числення логіки предикатів	176
3.2.4. Натуральне числення предикатів	182
 ЧАСТИНА ДРУГА НЕКЛАСИЧНА ЛОГІКА 	
Вступ	197
Розділ I.	
БАГАТОЗНАЧНА ЛОГІКА.....	199
1.1. Система багатозначної логіки Я. Лукасевича.....	200
1.1.1. Тризначна логіка Я. Лукасевича.....	200
1.1.2. Чотиризначна логіка Я. Лукасевича.....	205
1.2. Багатозначна логіка Брауера-Гейтінга	212
1.3. Багатозначна логіка Е. Поста	215
1.4. Тризначна логіка Д. Бочвара	218

РОЗДІЛ II.	
МОДАЛЬНА ЛОГІКА НА ПОЧАТКУ XX СТОЛІТТЯ	222
2.1. Критика К.І.Льюїсом класичної теорії логічного слідування	222
2.2. Концепція модальної логіки Я. Лукасевича.....	230
2.2.1. Тризначна система Я. Лукасевича.....	230
2.2.1. Чотиризначна система Я. Лукасевича.....	236
РОЗДІЛ III.	
СИСТЕМА МОДАЛЬНОЇ ЛОГІКИ	246
3.1. Алетична логіка	246
3.1.1. Мова атлетичної логіки висловлювань	247
3.1.2. Алетична логіка та теорія множинних світів.....	249
3.2. Темпоральна логіка	256
3.2.1. Мова темпоральної логіки висловлювань.....	257
3.2.2. Темпоральна логіка та теорія можливих світів	259
3.2.3. Метод аналітичних таблиць у темпоральній логіці	263
3.3. Деонтична логіка	265
3.3.1. Характеристика деонтичного висловлювання.....	266
3.3.2. Мета деонтичної пропозиційної логіки.....	269
3.3.3. Деонтична логіка та теорія можливих світів	273
3.4. Епістемічна логіка.....	276
3.4.1. Визначення епістемічної логіки	276
3.4.2. Мова епістемічної пропозиційної логіки	280
3.4.3. Епістемічна логіка та теорія можливих світів	284
Список літератури	289

ВСТУП

Із середини XIX ст. розпочинається період розвитку логіки, який отримав назву «сучасна логіка». Від самого початку виникнення цього періоду ведуться дискусії щодо предмету, методу сучасної логіки, а також про її співвідношення з традиційною логікою і про її теоретичне та практичне значення.

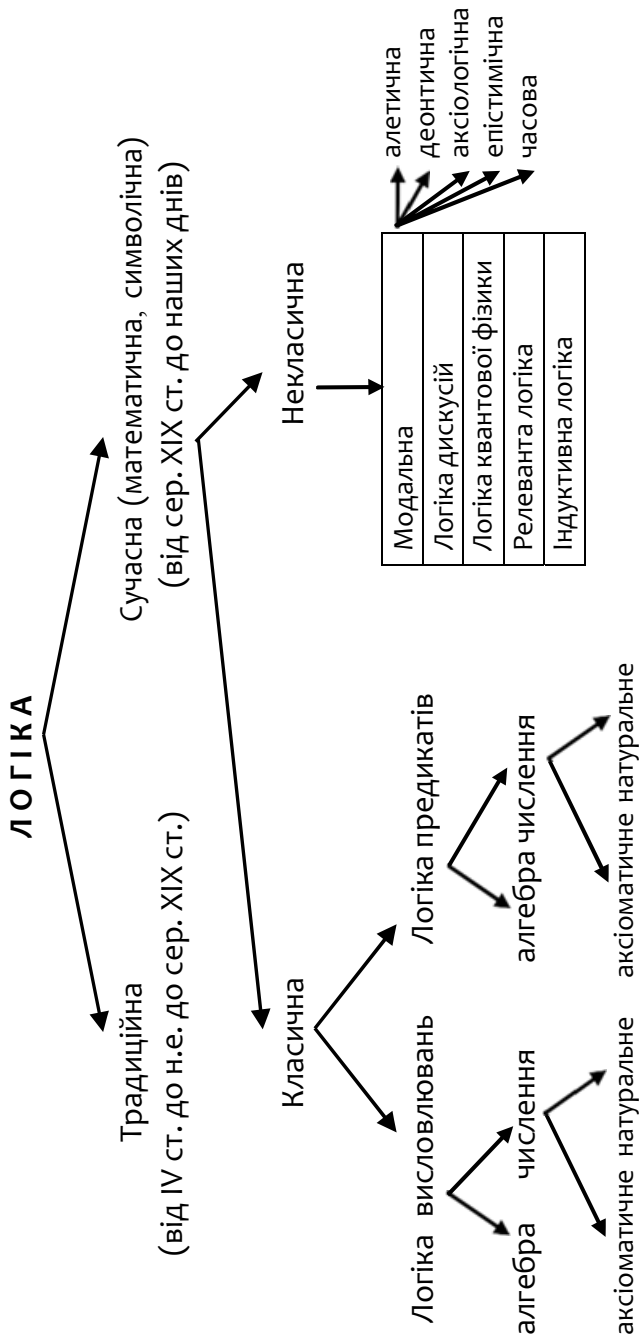
Поділ логіки на *традиційну* і *сучасну* свідчить не про існування двох різних логік, а про два історичних, теоретичних періоди однієї науки.

Ці два періоди єдині за методом і предметом, за практичним і теоретичним значенням. Але виконати свою роль (забезпечити семіотичний інваріант знання, тобто унеможливити втратити хоча б часточку здобутого знання, або його спотворити) логіка протягом більш як 2000-літньої історії не завжди була спроможна. Тобто логіка в силу відомих причин не завжди могла застосувати адекватний логічний інструментарій для виконання цієї місії. Хоча арсенал засобів логіки з початку її виникнення і до наших днів один і той самий – формалізована мова логіки, або формально-логічна теорія (ФЛТ). Порівнюючи історичні періоди логіки, ми можемо говорити лише про ступінь досконалості методу формалізації у ході історичного розвитку логічної науки.

Нижче подано схематичну структуру логіки як єдиної науки. Схема наочно представляє еволюцію методу формалізації від *напівформального* (традиційна логіка) до *чисто формального* (сучасна логіка).

Іноді в підручниках і монографіях традиційну логіку називають формальною (у сенсі – неповноцінна, недосконала, примітивна, шкільна, придатна лише для хатнього вжитку тощо). Ідею назвати традиційну логіку *формальною, загальною* зазвичай приписують Імануїлу Канту. Та це є, м'яко кажучи, не дуже коректно.

Насправді офіційно назва традиційної логіки як формальної пішла від Імануїла Канта. Але, як іноді буває, сучасники І. Канта та їх послідовники не вловили смисловий відтінок назви «*формальна логіка*». І. Кант ніколи не був логіком. Так, він викладав курс логіки. Але він розробляв *трансцендентальну* логіку, своєрідну гносеологію, в якій розчиняв філософію. І тому, коли він згадував про логіку, називаючи її *формальною, елементарною, загальною*, то мав на увазі, що логіка, яку він викладав, перебуває за межами його теорії пізнання. І навіть не варто робити якісь



критичні закиди на адресу Канта (що іноді зустрічається в літературі), посилаючись на те, що він не вбачав перспективи, розвитку логіки як науки, зазначаючи, що логіка вичерпала себе, подібно до того, як вичерпала себе геометрія Евкліда. Ще раз наголошую, це було за межами його інтересів як видатного філософа. Якщо сказане вище приймається, то називати логіку формальною – це зайве, усе одно, що назвати «сіль солоною».

Інша справа, що розвиток логіки був та є непростим. Це пов'язано із нашаруванням філософської проблематики на логічні проблеми, застосуванням у традиційній логіці методу формалізації у напівформальному вигляді, некритичним запозиченням і використанням у логіці термінів із різних сфер людського знання.

Історична доля логіки призводила до включення до неї без найменшого критичного застереження понять, які до логіки не мали жодного відношення, або такі, які хоч і вживані в логіці, то зовсім з іншими природою та змістом. Таких понять чимало. Насамперед це: *дійсність, існування (буття), істина, смисл, значення, закон, необхідність, можливість, синтетична істина, аналітична істина, дійсний світ, можливий світ, відображення, образ, прообраз* тощо.

І ще на одну обставину варто звернути увагу. Коли в підручниках з логіки, монографіях наголошують, що логіка, або за допомогою логіки обов'язково пізнається навколишній світ, дійсність, то нібито цим самим роблять грандіозну послугу логіці, *доводять її* потрібність.

Але насправді не в цьому цінність логіки. Логіка не здобуває знання, як роблять конкретні науки, логіка не визначає етапи й природу людського пізнання, як робить гносеологія. Логіка своїми засобами забезпечує, гарантує, що існуюче у суспільстві знання, яке здобула та яким володіє людина, за всіх можливих перетворень, метаморфоз не буде втрачене, не буде спотворене, що завдяки засобам логіки ще й стане переконанням. Саме перетворення знання на переконання, прийняття істини з необхідністю, визнання істини із примусом є евристичною функцією логіки.¹

Фундаторами сучасної логіки вважаються Рене Декарт і Готфрід Лейбніц. Саме вони звернули увагу на обмеженість засобів традиційної логіки в аналізі наукового знання, саме вони вказали, що майбутнє логічної науки визначатиметься удосконаленням її методу.

¹ Конверський А.Є., Традиційна логіка, К., 2021 р., стор. 153 – 155.

З цього приводу Р. Декарт зазначав: «...в логіці її силогізми і більша частина інших її настанов швидше допомагають пояснити іншим те, що нам відомо».

Сучасна Декарту схоластизована аристотелівська логіка не могла бути по-справжньому логічним інструментом дослідження мислення, знання.

Декарт ставить за мету повернути логіці первісне її значення як «органону» («знаряддя-пізнання»). Для цього він слідом за Арістотелем розробляє поняття «змінної».

Введення «змінної» дозволяє з'ясувати логічну форму висловлювання, як центральної ланки міркування. Наприклад, маємо висловлювання: «Будь-яка теорія є формою пізнання». Випишемо дескриптивні терміни, що є в цьому висловлюванні за допомогою відповідних символів x , S , P та отримаємо вираз $\forall x(S(x) \supset P(x))$, який представляє логічну форму цього висловлювання. А оскільки відомо, що отримання одних висловлювань з інших (що є головним інтересом логіки) визначається їх логічною формою, то цей бік смислу висловлювання називається його **дедуктивним змістом**.

Логічні розвідки Декарта досить наочно показують ще один смисловий відтінок трактування «форми», «формалізації», «формального підходу» в логіці, крім того який пов'язаний з формалізацією як методом логіки.

Мається на увазі, що логіка є формальною в тому сенсі, що вона абстрагується від змістовної сторони висловлювань (тобто від тієї інформації яка в них закладена) і бере до уваги лише їх логічну форму, яка (як уже було сказано вище) є їх **дедуктивним змістом**.

Готфрід Лейбніц вбачав майбутнє логіки у перетворенні її у своєрідну універсальну математику де правила доведення замінювалися б правилами числення. Така логіка, як мистецтво числення дозволить розкрити будь-яку логічну помилку як неточність у численні.

В зв'язку з цим Лейбніц дещо метафорично заявив «...єдиний засіб показати наші умовиводи – зробити їх, як і у математиків, наочними, так, щоб свої помилки знаходити очима, і, якщо серед людей виникає суперечка, потрібно буде сказати «Порахуємо», тоді без особливих формальностей можна буде побачити хто правий».

Першими працями із сучасної логіки були роботи англійського логіка Джорджа Буля: «Математичний аналіз логіки» (1847 р.) та «Дослідження законів мислення» (1854 р.). Джордж Буль, як послідовник ідей Лейбніца стосовно розвитку логічної науки, спираючись на аналогію деяких логічних та математичних операцій, створює першу систему сучасної логіки «Алгебру логіки».

Із наведеної вище схеми про етапи логічної науки видно, що сучасна логіка включає в себе «класичну логіку» та «некласичну логіку».

Класична логіка це такий розділ сучасної логіки, який базується на абстракції, що висловлювання може мати одну з двох оцінок: «істина» або «хиба». Класична логіка складається із «логіки висловлювань» і «логіки предикатів».

Логіка висловлювань, або пропозиційна логіка своїми засобами формалізує вживання пропозиційних зв'язок.

Логіка предикатів систематизує міркування в яких отримання висновку передбачає врахування внутрішньої структури висловлювань, із яких будується міркування.

Значний внесок у розвиток класичної логіки зробили Чарльз Пірс, Готлоб Фреге, Бертран Рассел, Альфред Тарський, Алоїз Черч, Рудольф Карнап та ін.

Некласичною логікою є той розділ сучасної логіки де висловлювання може мати більше двох оцінок. Тобто окреме висловлювання може мати не одну із двох оцінок («істина», «хиба»), а одну з трьох, із чотирьох оцінок і т.д.

Творцями некласичної логіки є Я. Лукасевич, Я. Брауер, К. Льюїс, Е. Пост, Х.Г. Врігт та ін.

І в класичній і в некласичній логіці можна віднайти продовження та поглиблення тих проблем, які окреслилися ще у традиційній логіці. Це також є підставою розглядати логіку як єдину систему.

Після цих загальних зауважень виникає доречне запитання: що має передувати викладу сучасної логіки, із чого починати виклад сучасної логіки? Тут можливі кілька варіантів. Або розкрити семантичний аналіз виразів природної мови, а потім перейти до функціонального аналізу в логіці та завершити розглядом елементів теорії множин. А можна розпочати з функціонального аналізу в логіці, розкрити семантичний аналіз виразів природної мови та розглянути елементи теорії множин. Нарешті, увести елементи теорії множин, описати семантичний аналіз виразів природної мови та завершити функціональним аналізом у логіці.

Останній варіант є найбільш ефективний і в методичному, і в теоретичному сенсі.

Розділ I

ПЕРЕДУМОВИ СУЧАСНОЇ ЛОГІКИ

1.1. Теорія множин і логіка

Фундатор теорії множин Георг Кантор навіть і не підозрював, яку важливу роль відіграє відкрита ним теорія у розвитку сучасної логіки.

Мало того, що апарат теорії множин можна ефективно застосовувати для аналізу проблем традиційної логіки (тлумачення об'єму поняття як множини, обґрунтування закону оберненого відношення між об'ємом і змістом поняття, систематичний огляд логічних відношень між поняттями тощо), але, що найголовніше, стало можливим обґрунтувати засобами теорії множин фундаментальні поняття сучасної логіки (*істина, буття, опис станів, дійсний стан речей, можливий світ* тощо), нарешті, забезпечити прикладний аспект логіки.

1.1.1. Визначення множини

Множину можна визначити як сукупність, зібрання предметів, що мають спільну ознаку, відрізняються одне від одного та сприймаються як єдине ціле утворення. Входить до множини, належати множині – не означає просторове й часове співіснування. Наприклад, усі чемпіони Пекінської олімпіади 2008 року утворюють одну множину, хоча живуть у різних країнах; Архімед та Ейнштейн належать до множини геніальних фізиків, хоча жили у різні часи.

Слід зауважити, що поняття множини є первинним, тобто таким, зміст якого в межах даної теорії не можна розкрити через зміст інших понять цієї теорії. Зміст поняття *множина* з'ясовується під час розгляду конкретних множин. Наприклад, можна говорити про *множину планет Сонячної системи*; *множину островів в Індійському океані*; *множину навчальних дисциплін в університеті*; *множину моїх приятелів, які знають англійську мову*;

множину персонажів повісті М.В. Гоголя "Тарас Бульба", множину букв українського алфавіту тощо.

Із цих прикладів видно, що множина – це сукупність, зібрання предметів, які об'єднані спільною ознакою (бути планетою Сонячної системи; бути островом в Індійському океані; бути персонажем повісті М.В. Гоголя "Тарас Бульба" тощо), при цьому ці предмети розрізняються та, разом із тим, сприймаються як єдине ціле.

Слід зважати на те, що множина не є предметом об'єктивної дійсності. Це є результат інтелектуальної діяльності. Множина відрізняється від таких сукупностей предметів, як сузір'я Лева; футбольна команда "Динамо-Київ"; Конгрес США тощо. Останні, на відміну від множин, доречніше називати агрегатами. Агрегат також складається із сукупностей предметів, але являє собою дещо зв'язане ціле, або, у крайньому випадку, у деяких відношеннях виступає як реальне ціле (футболісти, конгресмени мають, відповідно, спільні завдання, несуть відповідальність за їх виконання).

Множина лише в мисленні виявляється самостійним об'єктом. Звичайно об'єктом думки може стати й сама сукупність предметів, які утворюють агрегат (зірки "сузір'я Лева"; футболісти "Київського Динамо"; конгресмени США тощо).

Але предмети, які складають агрегат, – це його частини, а предмети множини – це елементи множини. Елементи множини фіксуються мисленням як такі, що існують окремо, незалежно один від одного, просто як такі, що об'єднані спільною ознакою. Іншими словами, елементи відрізняються один від одного, тому кожен є носієм власного імені (Архімед, Ейнштейн). Одночасно вони нерозрізновані, оскільки об'єднані спільною ознакою (бути геніальним фізиком).

Позначатимемо елементи множини малими буквами латинського алфавіту – $a, b, c, \dots x, y, z$, а самі множини – $A, B, C, \dots X, Y, Z$. Візьмемо, наприклад, множину Резиденції Гетьманів України. Елементами даної множини будуть предмети: м. Чигирин, м. Глухів, м. Біла Церква, м. Батурин. За допомогою символів цю множину можна записати наступним чином:

$$A = \{a, b, c, d\}.$$

Множині A належать елементи a, b, c, d ,
або

Множина A складається із елементів a, b, c, d ,
де a – м. Чигирин, b – м. Глухів, c – м. Біла Церква, d – м. Батурин.

Як видно із прикладу, основна ідея теорії множин полягає в тому, що довільні об'єкти $a, b, c, d \dots$ певним чином однозначно визначають деякий новий об'єкт – множину (A) і, навпаки, множина (A), у свою чергу однозначно визначає об'єкти – $a, b, c, d \dots$ (свої елементи). Зазначене відношення між об'єктами та множиною, яку вони визначають, можна виразити так:

Множина (A) складається з елементів $a, b, c, d \dots$,
або елементи $a, b, c, d \dots$ належать множині (A).

Термін *належить*, як і термін *елемент* не визначається, є первинним, і його зміст розкривається на прикладах. Аби записати, що елемент (a) належить множині A застосовують знак належності $\in$.

Відношення неналежності елемента множині позначають символом $\bar{\in}$ або $\notin$, наприклад, $a \notin A$.

1.1.2. Побудова множини та її фундаментальні ознаки

Головними принципами побудови теорії множин є:
а) *принцип об'ємності* (визначення рівності множин);
б) *принцип абстракції*.

Розглянемо ці принципи по чергово.

Принцип об'ємності виражає основну вимогу до теорії множин, згідно з якою множина повністю визначається своїми елементами.

Дві множини рівні тоді й тільки тоді,
коли вони складаються з одних і тих самих елементів.

Скорочено принцип об'ємності (визначення рівності множин) можна записати так:

Якщо із $x \in A$ випливає $x \in B$, а із $x \in B$ випливає $x \in A$
для будь-якого x , то $A = B$

або

$$[\forall x ((x \in A) \supset (x \in B) \ \& \ \forall x (x \in B) \supset (x \in A))] \supset (A = B).$$

Іншими словами, рівні множини – це ті, що створені із одних і тих самих елементів, але за різними ознаками. Наприклад:

Множина парних чисел (A) і множина чисел,
які діляться на 2 (B)
 $A = \{2,4,6,8\}$ і $B = \{2,4,6,8\}$.
 $A = B$.

Множина університетів України,
які одними із перших стали національними (A);
Множина університетів України, які одними з перших
здобули статус дослідницького (B).

$A = \{\text{КНУ імені Т.Шевченка, НТУ "КПІ", НаУКМА}\}$.
 $B = \{\text{КНУ імені Т.Шевченка, НТУ "КПІ", НаУКМА}\}$.
 $A = B$.

Проілюструємо на останньому прикладі принцип об'ємності. Якщо із факту належності НаУКМА до національних університетів випливає, що НаУКМА належить до дослідницьких університетів, а із факту належності НаУКМА до дослідницьких університетів випливає, що НаУКМА належить до національних університетів, і це має місце для будь-якого елементу множин A та B , то це означає, що множина A рівна множині B .

Очевидно, що принцип об'ємності можна визначити й так:

Якщо із $x \notin A$ випливає $x \notin B$,
а з $x \notin B$ випливає $x \notin A$ для всіх x , то $A = B$.

Проілюструємо формулювання принципу об'ємності наступним прикладом: Якщо із факту неналежності Житомирського педуніверситету ім. І.Я. Франка до національних університетів випливає неналежність Житомирського педуніверситету ім. І.Я. Франка до дослідницьких університетів, а із факту неналежності Житомирського педуніверситету ім. І.Я. Франка до дослідницьких університетів випливає неналежність Житомирського педуніверситету

ім. І.Я. Франка до національних університетів, і це має місце для будь-якого педуніверситету України, то множини A та B рівні.

Згідно із принципом об'ємності вірними є такі властивості рівних множин:

- а) $A = A$;
- б) якщо $A = B$, то $B = A$;
- в) якщо $A = B$, а $B = C$, то $A = C$.

Дві множини називають нерівними,
якщо принаймні одна із них містить елемент,
що не міститься в другій: $A \neq B$.

Важливим питанням теорії множин є питання про те, як задати множину. Основною складністю у розв'язанні цього питання є те, що поняття множини, як зазначалось, є первинним, невизначеним.

Виходячи із наведених вище понять *множина*; *елемент*; *відношення належності та неналежності*; *рівність множин*, можна стверджувати: задати множину – означає встановити, із яких елементів вона складається, тобто для кожного елемента з'ясувати, належить він цій множині чи ні. Коли множина скінченна, то її задання полягає у переліку її елементів. Наприклад, *множина бібліотек у нашому місті*, *множина пам'яток культури Поділля* тощо.

Але коли множина нескінченна, або неосяжна, тоді цей спосіб задання множини не підходить. У цих випадках слід застосовувати принцип абстракції.

Принцип абстракції – це застосування характеристичної ознаки для задання множини.

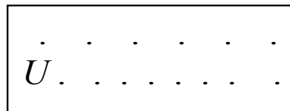
Характеристичною називають ознаку, яка належить кожному елементу множини A

й не належить жодному елементу за межами цієї множини.

Отже, задати множину – означає вказати її характеристичну ознаку: $A = \{x \mid P(x)\}$ – *множина всіх (x) , яким притаманна ознака P .*

Універсальною називають множину, яка складається з усіх елементів досліджуваної предметної області.

Наприклад, множина фізичних явищ у фізиці, множина чисел у математиці, множина хімічних елементів у хімії, множина історичних явищ в історії тощо. Позначають універсальну множину буквою U (перша буква в латинському слові *загальний*). Графічно універсальну множину зображують прямокутником:



Порожньою називають множину, що не має жодного елементу.

Прикладом порожньої множини є: *вічний двигун, круглий квадрат, ідеальний газ, житель Місяця* тощо. Позначають порожню множину символом $\emptyset$.

За допомогою первинних понять *множина, елемент, відношення належності* введемо поняття *підмножина* та *відношення включення*. Будь-яку частину множини називають підмножиною.

Множину (A) називають підмножиною множини (B), якщо кожен елемент множини (A) належить множині (B). У цьому випадку пишуть: $A \subset B$ і говорять:

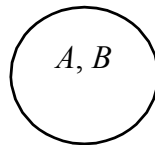
A включається (міститься) до B .

Відношення включення буває двох видів: *включення в широкому сенсі* – $\subseteq$ та у *вузькому сенсі* – $\subset$.

Включенням в широкому сенсі множини (A) до множини (B) називають таке включення, за якого будь-який елемент множини (A) належить множині (B) і, у свою чергу, будь-який елемент множини (B) належить множині (A):

$$A \subseteq B =_{\text{def}} [(x \in A) \supset (x \in B)] \wedge [(x \in B) \supset (x \in A)].$$

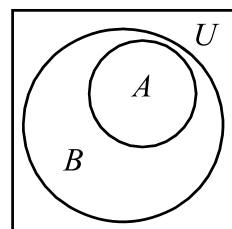
Наприклад, є множина A – *множина квадратів* і множина B – *множина прямокутників із рівними сторонами*. Між ними існує відношення включення в широкому сенсі. Графічно це можна зобразити так:



Включенням у вузькому сенсі множини (A) до множини (B) називають таке включення, за якого будь-який елемент множини (A) належить множині (B), але не всі елементи множини (B) належать множині (A):

$$A \subset B = \forall x (x \in A) \supset (x \in B) \wedge \bar{\forall} x (x \in B) \supset (x \in A).$$

Наприклад, маємо множину (A) – давньогрецькі філософи та множину (B) – геніальні філософи. Між ними існує відношення включення у вузькому смислі. Графічно це можна зобразити так:



Множину (A), включену до іншої множини (B), називають правильною частиною, або власною підмножиною (у нашому прикладі це *давньогрецькі філософи*). Множину (B) у цій ситуації називають надмножиною (*геніальні філософи*).

Фактично включення у вузькому смислі, або суворе включення передбачає, що множини не рівні: $A \neq B$.

Кожна множина має повну та порожню частини. Повну частину позначають цифрою (1), а порожню – (0). Їх називають ще *невласними підмножинами* множини.

Факт наявності у множин невластних підмножин (повної і порожньої) закладений у самій природі характеристичної ознаки. Нагадаємо, що характеристична ознака вказує саме на ту ознаку, яка належить тим і тільки тим самим елементам, які входять до конкретної множини (напр., *множини геометричних фігур*) та не належить жодному елементу, який не входить до множини *геометричних фігур*.

Входження елементів до множини *геометричних фігур* відбувається до повного вичерпання наявних елементів. І трикутник, і квадрат, і трапеція вичерпуються ознакою бути геометричною фігурою.

У той самий час відсутність цієї характеристичної ознаки в усіх інших елементів окреслює межу для даної множини. Тобто порожня множина як невластна частина довільної множини відмежовує, виокремлює цю множину серед інших множин.

Усе, що належить множині, – перебуває в ній; усе, що не належить їй, – відмежоване, відкинуте, відділене. Тобто сюди не ввійдуть планети, числа, книги, історичні події.

Із принципу об'ємності та поняття включення випливає, що множини A та B рівні тоді й тільки тоді, коли (A) включається до (B), а (B) включається до (A):

$$(A = B) \equiv_{df} (A \subset B) \wedge (B \subset A).$$

Із визначення порожньої множини ($\emptyset$) випливає, що « $\emptyset$ (порожня множина) є підмножиною довільної множини».

Побудуємо доведення цієї тези шляхом апалогічного доведення, а саме, застосовуючи «закон Клавія».

Для того щоб побудувати доведення за допомогою «закону Клавія» слід здійснити наступні кроки або дії:

1. – ввести припущення, що теза є хибним судженням;
2. – показати, що із хибності цього судження випливає його істинність.

Отже, маємо тезу:

«Порожня множина ($\emptyset$) є підмножиною довільної множини (A)».

Висуваємо антитезу:

«Судження «Порожня множина ($\emptyset$) є підмножиною довільної множини (A)» є хибне.

Якщо це так, то існує деякий елемент порожньої множини x , який не належить множині (A):

$$1) x \in \emptyset; \text{ і}$$

$$2) x \notin A.$$

Але така ситуація неможлива, оскільки порожня множина ($\emptyset$) не має жодного елементу. Тоді наше припущення, що порожня множина не включається в довільну множину (A) (« $\emptyset \notin A$ ») слід відкинути і визнати істинною тезу: **«Порожня множина, або нульова множина обов'язково є підмножиною довільної підмножини (A)» – « $\emptyset \subset A$ »**

А це означає також і те, що «Будь-яка непорожня множина (A) обов'язково має дві підмножини»

- а) саму множину (A);
- б) порожню множину $\emptyset$

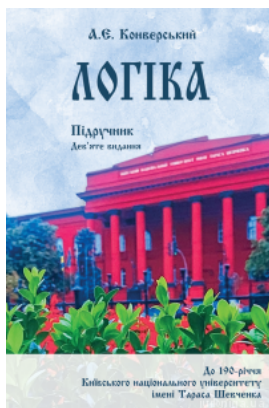
Коли довільну множину (A) ми будемо розглядати як частину самої себе, то її слід називати повною частиною. Це ідає підстави називати повну і порожню частини довільної множини (A) її невластими підмножинами. Решта підмножин є власними.

Для більш яскравої аргументації тези, що порожня множина ($\emptyset$) є підмножиною будь-якої множини наведемо ще одне міркування: Якщо $x \notin A$, то $x \notin \emptyset$, оскільки за визначенням порожня множина не має елементів. Отже, $\emptyset \subset A$.

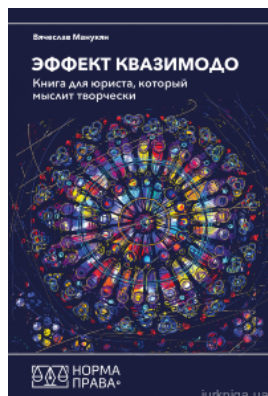
Таким чином, довільна множина (A), яка не дорівнює підмножині $\emptyset$ ($A \neq \emptyset$), має у крайньому разі дві різні підмножини: порожню ($\emptyset$) та саму себе (A).

Сказане вище проілюструємо прикладом. Маємо множину (A) – геніальні філософи. Власною підмножиною є множина (B) – давньогрецькі філософи.

Книги, які можуть вас зацікавити



Логіка. Підручник для студентів юридичних факультетів



Эффект Квaziмодо. Книга для юриста, который мыслит творчески



Адвокатська техніка (підготовка до процесу і методики переконання)



Логіка для юристів. Навчальний посібник для підготовки до іспитів



Постижение права. Активация творческого мышления юриста



Досить уже помилок. Як наші упередження впливають на наші рішення

Перейти до галузі права
Теорія держави і права



Перейти на сайт →